УДК 519.688:541

М.В. Кретов, Н.В. Виноградова, О.В. Воротникова

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ДОРОЖНОМ СТРОИТЕЛЬСТВЕ

Рассматриваются математические модели для оценки качества дорожно-строительных материалов. Построена математическая модель современного асфальтобетонного завода с несколькими асфальтосмесительными установками. Дана методика определения надежности работы завода по выпуску асфальтобетонных смесей.

Mathematical models for an estimation of quality of road-building materials are considered. The mathematical model of the modern asphalt-concrete factory with several asphalt-mixing installations is constructed. The technique of definition of reliability of work of a factory on release asphalt-concrete mixes is given.

Ключевые слова: случайная величина, водонасыщение, критерий Пирсона, критерий Колмогорова, статистика, асфальтобетонная смесь, цепь Маркова, надежность, вероятность, доверительный интервал, эффективность.

Key words: a random variable, water saturation, criterion of Pirson, criterion of Kolmogorov, statistician, an asphalt concrete a compound, a Markov chain, reliability, probability, a confidential interval, efficiency.

Введение

В работе осуществляется подбор и построение математических моделей с применением методов теории вероятностей и математической статистики. По этому направлению ранее были опубликованы работы в материалах научных конференций [1—4]. В настоящей статье дается дальнейшее развитие математического моделирования в дорожном строительстве.

Математические методы оценки качества дорожно-строительных материалов

Методы теории вероятностей и математической статистики можно использовать для оценки качества прочности дорожно-строительных материалов, в частности для их исследования на водонасыщение, износ и деформацию. В качестве примера рассмотрим исследование N образцов асфальтобетонной смеси на водонасыщение. Для определения закона распределения случайной величины ξ (водонасыщения) нужно результаты исследования представить в виде сгруппированного статистического ряда [5] (табл. 1).

Таблица 1

Интервалы водонасыщения для частот

Интервал водонасыщения	Частота
$[x_i - 1, x_i)$	k_i
$[x_0, x_1)$	k_1
$[x_1, x_2)$	k_2
…	…
$[x_n - 1, x_n)$	k_n
Сумма $\sum_{i=1}^{n} k_i = N$	

Выдвигаем гипотезу Н, состоящую в том, что распределение водонасыщения имеет определенный вероятностный закон распределения. В качестве этого закона чаще всего рассматривают нормальный закон распределения с параметрами a и σ, равными выборочному среднему $\overline{x}$ и выборочному среднему квадратическому отклонению S, так как объем выборки N считается большим, например больше 50.

Чтобы проверить гипотезу Н, состоящую в том, что распределение водонасыщения асфальтобетонной смеси имеет нормальный закон распределения с уровнем значимости, например, равным $\alpha = 0{,}01$, можно воспользоваться критерием К. Пирсона, или критерием А. Н. Колмогорова [6; 7]. Методика проверки гипотезы как у К. Пирсона, так и у А. Н. Колмогорова одинакова. Достаточно рассмотреть один из этих критериев. Остановимся на анализе критерия А. Н. Колмогорова. Схема его применения для проверки выдвинутой нами гипотезы Н выглядит следующим образом.

Все вспомогательные расчеты, необходимые для вычисления выборочной статистики $\lambda = D\sqrt{N}$, сводят в таблицу 2.

Таблица 2

Вычисление выборочной статистики

Интервалы изменения наблюдаемых значений случайной величины ξ, $[x_i - 1, x_i)$	Частота k_i	Нормированные интервалы $[u_i - 1, u_i)$ $u_i = \frac{x_i - \overline{x}}{S}$	Значение выборочной функции распределения для правого конца интервала $[u_i - 1, u_i)$	Теоретическая функция распределения $F(u_i) = 0{,}5 + 0{,}5\Phi(u_i)$	$\Delta_i = \lvert F^*(u_i) - F(u_i) \rvert$
Менее x_0	0	$(-\infty, u_1)$	0	$F(u_1)$	Δ_1
$[x_0, x_1)$	k_1	$[u_1, u_2)$	$F^*(u_2)$	$F(u_2)$	Δ_2
$[x_1, x_2)$	k_2	$[u_2, u_3)$	$F^*(u_3)$	$F(u_3)$	Δ_3
…	…	…	…	…	…
$[x_n - 1, x_n)$	k_n	$[u_n - 1, u_n)$	$F^*(u_n)$	$F(u_n)$	Δ_n

Сумма $N = \sum_{i=1}^{n} k_i$.

Из последнего столбца таблицы определяют значение выборочной статистики $D = \max_{u_i} \left| F^*(u_i) - F(u_i) \right|$. Вычисляем наблюдаемое значение выборочной статистики: $\lambda_0 = D\sqrt{N}$. Из таблицы распределения Колмогорова [8] по заданной вероятности α находим критическое значение λ_α.

Критерий для проверки гипотезы Н формулируется следующим образом: если $\lambda_0 < \lambda_\alpha$, то нет оснований для отклонения гипотезы о том, что водонасыщение асфальтобетонной смеси имеет нормальное распределение с параметрами $\overline{x}$ и S. В противном случае выдвинутую гипотезу отклоняют. Как правило, на практике оказывается, что $\lambda_0 < \lambda_\alpha$, поэтому водонасыщение асфальтобетонной смеси считают нормально распределенной случайной величиной ξ с параметрами $\overline{x}$ и S. Аналогичное исследование можно было провести и для других качественных характеристик асфальтобетонной смеси, а также для других дорожно-строительных материалов, например гравия и щебня.

Из вышеизложенного следует, что для качественных характеристик дорожно-строительных материалов можно строить доверительные интервалы с наперед заданными надежностями их оценки. При этом доверительные интервалы, соответствующие одному и тому же коэффициенту доверия, получаются самыми короткими, так как статистические оценки для качественных характеристик дорожно-строительных материалов являются эффективными.

Математическая модель асфальтобетонного завода

Рассмотрим асфальтобетонный завод, содержащий n смесителей, каждый из которых может обслуживать только одну машину. Для получения асфальтобетона на завод приезжают машины, загружаются асфальтобетонной смесью и уезжают. Если в момент приезда автомашины все смесители заняты отпуском асфальтобетона, то она ожидает начала обслуживания. В момент освобождения смесителя из очереди на обслуживание заезжает очередной автосамосвал. Будем предполагать, что дисциплина очереди, то есть порядок загрузки автомобилей асфальтобетоном, в рассматриваемом случае роли не играет.

Формально процесс отпуска асфальтобетона представляет собой дискретную цепь Маркова с пространством состояний $E = \{0, 1, \ldots\}$ [9].

Такты процесса обслуживания соответствуют шагам цепи Маркова. Состояние $k \in E$ означает наличие k автомобилей под загрузкой на заводе. За каждый такт с вероятностью α приезжает новая машина и с вероятностью $q_k = \mu \min(k, n)$ завершается загрузка автомобиля, где $\mu > 0$

— интенсивность загрузки одним смесителем; k — число автомобилей, стоящих под загрузкой. При этом $\alpha + \mu n < 1$, $r = \dfrac{\alpha}{\mu n} < 1$.

Описанная выше модель является дискретной цепью Маркова размножения и гибели, так как на каждом шаге цепь или остается в том же состоянии k, или переходит в соседние состояния $k+1$ или $k-1$. Поэтому для стационарных вероятностей $a_k = \lim\limits_{n\to\infty} p_{i,k}^{(n)}$ имеет место система уравнений

$$a_k = \sum_{i=1}^{\infty} a_i p_{i,k}, \; k = 1, 2, \ldots,$$

которая в нашем случае имеет вид:

$$a_0 = (1-p_0)a_0 + q_1 a_1, \; a_k = (0 - p_k - q_k)a_k + q_{k+1}a_{k+1} + p_{k-1}a_{k-1}, \; k = 1, 2, \ldots,$$

где $p_k = \alpha$ для всех $k \in E$. Легко видеть, что для $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$\frac{p_0 p_1 \cdots p_{k-1}}{q_0 q_1 \cdots q_k} = \alpha^k \frac{1}{\mu \cdot 2\mu \cdot \ldots \cdot k\mu} = \frac{1}{k!}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^k,$$

для $k = n + 1, n + 2, \ldots, n$:

$$\frac{p_0 p_1 \cdots p_{k-1}}{q_0 q_1 \cdots q_k} = \alpha^k \frac{1}{\mu \cdot 2\mu \cdot \ldots \cdot (n-1)\mu \cdot n\mu \cdot \ldots \cdot n\mu} = \frac{1}{n!}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^k n^{n-k} = \frac{1}{n!} n^n r^k,$$

значит,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_0 p_1 \cdots p_{k-1}}{q_0 q_1 \cdots q_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^k + \frac{1}{n!} n^n \sum_{k=n+1}^{\infty} r^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^k + \frac{1}{n!}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^n \frac{r}{1-r},$$

если $r < 1$, то есть при $r < 1$ рассматриваемая сумма конечна. Параметр r назовем *коэффициентом загрузки смесителей асфальтобетонного завода*. Следовательно, действительно существует стационарный режим [9].

Из легко получаемых формул

$$a_0 = \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_0 p_1 \cdots p_{k-1}}{q_0 q_1 \cdots q_k}\right)^{-1}, \; a_k = \frac{p_0 p_1 \cdots p_{k-1}}{q_1 q_2 \cdots q_k} a_0, \; k = 1, 2, \ldots,$$

находим выражения для вероятностей состояний:

$$a_0 = \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^k + \frac{1}{n!}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^n \frac{r}{1-r}\right)^{-1}, \quad a_k = \begin{cases} \dfrac{1}{k!}\left(\dfrac{\alpha}{\mu}\right)^k a_0, \; k = 1, 2, \ldots, n, \\ \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{\alpha}{\mu}\right)^k n^{n-k} a_0, \; k = n+1, n+2, \ldots \end{cases}$$

Полученные формулы дают возможность вычислить среднюю длину очереди автомашин, среднее число автомашин, находящихся под загрузкой асфальтобетоном и т. д.

Пример. Пусть $n = 4$, $\alpha = 0{,}1$, $\mu = 0{,}05$. Коэффициент загрузки смесителей асфальтобетона $r = 0{,}1/(4{\cdot}0{,}05) = 0{,}1/0{,}2 = 1/2 = 0{,}5 < 1$; следовательно, стационарный режим существует. Распределение вероятностей числа автомашин, находящихся на асфальтобетонном заводе под загрузкой и стоящих в очереди, можно представить в виде следующей таблицы (табл. 3).

Таблица 3

Распределение вероятностей числа автомашин

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
αk	0,130	0,260	0,260	0,173	0,087	0,035	0,012	0,003	0,001	0,0

Методика определения надежности работы асфальтобетонного завода

Асфальтобетонный завод состоит из ряда сооружений: асфальтосмесителя, накопительного бункера, силосной банки, сушильного барабана, пультовой, компрессора, загрузочного бункера с питателем, дымовой трубы, топливного бака, циклонов, вентилятора, битумоплавильной установки и др. В свою очередь каждое из указанных сооружений состоит из нескольких узлов и устройств; например, битумоплавильная установка включает в себя: котел, сальниковый кран, электровинтовой привод, приварные фланцы и бесшовные стальные трубы. Отказ любого устройства приводит в нерабочее состояние асфальтобетонный завод.

Найдем вероятность безотказной работы исследуемого завода. Пусть асфальтобетонный завод состоит из n устройств. Время работы k-го устройства есть случайная величина ξ_k с функцией распределения $F_k(t) = P(\xi_k < t)$, то есть вероятность k-го устройства быть исправным в момент времени t равна $\overline{F}_k(t) = 1 - F_k(t)$. Случайные величины ξ_k практически независимы [5]. Состояние k-го устройства зададим функцией

$$e_k(t) = \begin{cases} 0, \text{ если } k\text{-е устройство исправно в момент } t, \\ 1, \text{ если } k\text{-е устройство неисправно в момент } t. \end{cases}$$

Тогда состояние завода задается двоичным вектором $\overline{e}(t) = (e_1(t), e_2(t), \ldots, e_n(t))$. Предположим, что завод может находиться только в двух состояниях: исправном и неисправном:

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} 0, \text{ если в момент } t \text{ завод исправен}, \\ 1, \text{ если в момент } t \text{ завод неисправен}. \end{cases}$$

Состояние устройств завода в каждый момент времени однозначно определяет его состояние: $\varphi_0(t) = \varphi(e_1(t), e_2(t), \ldots, e_n(t))$.

Введем упорядоченность [2] на множестве двоичных векторов: если $e_k \leqslant e'_k$ для всех k, то $\overline{e} = (e_1, e_2, \ldots, e_n) < \overline{e}' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$. Если завод неисправен, то дополнительные отказы устройств не могут перевести его в рабочее состояние. Это означает, что из неравенства $\overline{e} < \overline{e}'$ следует, что $\varphi(\overline{e}) \leqslant \varphi(\overline{e}')$. Функция φ определяет разбиение всех n-мерных двоичных векторов $E = \{\overline{e}\}$ на два подмножества: исправных $E_+ = \{\overline{e} : \varphi(\overline{e}) = 0\}$ и неисправных $E_- = \{\overline{e} : \varphi(\overline{e}) = 1\}$ устройств. Пусть $\tau = \inf\{t : \overline{e}(t) \in E_-\}$ — время безотказной работы завода, $F(t) = P(\tau < t)$ — вероятность отказа завода до момента t, $\overline{F}(t) = P(\tau \geqslant t)$ — вероятность безотказной работы завода до момента t. Тогда выражение для вероятности безотказной работы завода имеет вид

$$\overline{F}(t) = \sum_{\overline{e} \in E_+} p(\overline{e}),$$

где

$$p(\overline{e}) = \prod_{k=1}^{n} \overline{F}_k^{1-e_k}(t) F_k^{e_k}(t)$$

есть вероятность того, что завод в момент t находится в состоянии $\overline{e}$.

Устройства на заводе соединены фактически последовательно [10], поэтому вероятность безотказной его работы равна

$$\overline{F}(t) = \prod_{k=1}^{n} \overline{F}_k(t).$$

Так как

$$1 - \sum_{k=1}^{n} F_k \leqslant \prod_{k=1}^{n} (1 - F_k) \leqslant 1 - \sum_{k=1}^{n} F_k + \sum_{k<j} F_k F_j \leqslant 1 - \sum_{k=1}^{n} F_k + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} F_k\right)^2,$$

то верна формула

$$F(t) \approx \sum_{k=1}^{n} F_k,$$

абсолютная погрешность которой не превышает $\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} F_k\right)^2$.

Найдем интенсивность [10] выхода завода из строя:

$$\lambda(t) = -\frac{\overline{F}'(t)}{\overline{F}(t)} = -(\ln \overline{F}(t))' = -\sum_{k=1}^{n} (\ln \overline{F}_k(t))' = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\overline{F}'_k(t)}{\overline{F}_k(t)} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(t),$$

то есть интенсивность выхода завода из строя равна сумме интенсивностей отказа устройств.

Обозначим через

$$t_k = M\xi_k = \int_0^\infty \overline{F}_k(t)\,dt$$

среднее время работы k-го устройства, а через

$$T = M\tau = \int_0^\infty \overline{F}(t)dt$$

среднее время работы завода, тогда $T \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{t_k} \right)^{-1}$.

Список литературы

1. *Кретов М. В.* Вероятностные методы оценки прочности строительных материалов // Материалы международной научной конференции. Калининград, 2003. С. 228.

2. *Кретов М. В.* Применение дисперсионного анализа в дорожном строительстве // Материалы международной научной конференции. Калининград, 2004. С. 158—159.

3. *Кретов М. В.* Математическая модель асфальтобетонного завода с несколькими смесителями // Материалы международной научной конференции. Калининград, 2005. С. 398—399.

4. *Кретов М. В.* О надежности работы асфальтобетонного завода // Материалы международной научной конференции. Калининград, 2005. С. 399—400.

5. *Кретов М. В.* Теория вероятностей и математическая статистика. Калининград, 2004.

6. *Ширяев А. Н.* Вероятность-1. М., 2004.

7. *Ширяев А. Н.* Вероятность-2. М., 2004.

8. *Большов Л. Н., Смирнов Н. В.* Таблицы математической статистики. М., 1983.

9. *Андронов А. М., Копытов Е. А., Гринглаз Л. Я.* Теория вероятностей и математическая статистика. СПб., 2004.

10. *Барзилевич Е. Ю., Беляев Ю. К., Каштанов В. А. и др.* Вопросы математической теории надежности. М., 1983.

Об авторах

Михаил Васильевич Кретов — канд. физ.-мат. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.
E-mail: kretov20062006@ yandex.ru

Наталья Викторовна Виноградова — ст. преп., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.
E-mail: natavino@yandex.ru

Ольга Владимировна Воротникова — ст. преп., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.
E-mail: vorotnikova1@narod.ru

About authors

Dr Michail Kretov — assistant professor, I. Kant Federal University, Kaliningrad.
E-mail: kretov20062006@ yandex.ru

Natalya Vinogradova — high instructor, I. Kant Federal University, Kaliningrad.
E-mail: natavino@yandex.ru

Olga Vorotnikova — high instructor, I. Kant Federal University, Kaliningrad.
E-mail: vorotnikova1@narod.ru